1. Lösungen zu Kapitel 1

Übungsaufgabe 1.1

a)

$$\begin{aligned}P(\text{HIV-positiv}|\text{positiver HIV-Test}) &= \frac{P(\text{HIV-positiv, positiver HIV-Test})}{P(\text{positiver HIV-Test})} \\ &= \frac{10/100.000}{20/100.000} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

b)

$$P(\text{positiver HIV-Test}|\text{HIV-positiv}) = \frac{10/100.000}{10/100.000} = 1$$

c)

$$P(\text{positiver HIV-Test}|\text{HIV-negativ}) = \frac{10/100.000}{99.990/100.000} = \frac{1}{9.999}$$

Übungsaufgabe 1.2

a)

$E(Y) = 0,962 \cdot 0 + 0,038 \cdot 1 = 0,038$

b)

$E(Y|X = 1) = \frac{0{,}492}{0{,}520} \cdot 0 + \frac{0{,}028}{0{,}520} \cdot 1 = 0,054$
$E(Y|X = 0) = \frac{0{,}470}{0{,}480} \cdot 0 + \frac{0{,}010}{0{,}480} \cdot 1 = 0,021$

c)

$P(Y = 0|X = 1) = \frac{0{,}492}{0{,}520} = 0,946$
$P(Y = 1|X = 1) = \frac{0{,}028}{0{,}520} = 0,054$

d) Y und X sind mit großer Wahrscheinlichkeit nicht unabhängig, da zu erwarten ist, dass zwischen dem Geschlecht (X) und der Aufnahme einer geringfügigen Beschäftigung (Y) ein systematischer Zusammenhang besteht.

Wären Geschlecht und Art der Beschäftigung deskriptiv unabhängig, so müsste z.B. die gemeinsame Wahrscheinlichkeit ein Mann zu sein und eine geringfügige Beschäftigung zu haben gleich dem Produkt der Randverteilungen $(0,480 \cdot 0,038 = 0,018)$ sein. Laut Tabelle ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit jedoch aber 0,010.

Übungsaufgabe 1.3

Der Anlagebetrag wird in ein Portfolio mit N Finanztitel aufgeteilt, die jeweils die Anteile $w_1, w_2, \ldots, w_N$ haben. Die erwartete Rendite dieses Portfolios ist die gewichtete Summe aus den einzelnen erwarteten Renditen $E(R_i)$, wobei die Anteile w_i als Gewicht dienen, d.h.

$$E(R_P) = w_1 \cdot E(R_1) + w_2 \cdot E(R_2) + \ldots + w_N \cdot E(R_N).$$

Die Varianz σ_P^2 des Portfolios, die das Risiko misst, hängt sowohl von den Einzelrisiken der Finanztitel gemessen durch die einzelnen Varianzen σ_i^2 als auch von der Kovarianz der Finanztitel σ_{ij} ab:

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 = {} & w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots + w_N^2 \cdot \sigma_N^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \sigma_{12} \\ & + \ldots + 2 \cdot w_{N-1} \cdot w_N \cdot \sigma_{N-1N}.\end{aligned}$$

Alternativ kann die Varianz anstelle mit der Kovarianz mit dem Korrelationskoeffizienten ρ_{ij} ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 = {} & w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots + w_N^2 \cdot \sigma_N^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ & + \ldots + 2 \cdot w_{N-1} \cdot w_N \cdot \rho_{N-1\ N} \cdot \sigma_{N-1} \cdot \sigma_N.\end{aligned}$$

Da die einzelnen Varianzen positiv sind und die Korrelationskoeffizienten ρ_{ij} zwischen -1 und $+1$ liegen, ist das Risiko am geringsten wenn die Korrelationskoeffizienten -1 sind. In diesem Fall bewegen sich die Renditen der Finanztitel gegenläufig, d.h. sinkt der Wert eines Finanztitels steigt der Wert eines anderen. So werden Ausfallrisiken minimiert.

Übungsaufgabe 1.4

a)

$$\begin{aligned}
E(Y) &= 0,343 \cdot 0 + 0,314 \cdot 1 + 0,343 \cdot 3 = 1,343 \\
Var(Y) &= 0,343 \cdot (0-1,343)^2 + 0,314 \cdot (1-1,343)^2 + 0,343 \cdot (3-1,343)^2 = 1,597 \\
E(Y|x=1) &= \frac{0,129}{0,500} \cdot 0 + \frac{0,157}{0,500} \cdot 1 + \frac{0,214}{0,500} \cdot 3 = 1,598 \\
E(Y|x=2) &= \frac{0,214}{0,500} \cdot 0 + \frac{0,157}{0,500} \cdot 1 + \frac{0,129}{0,500} \cdot 3 = 1,088 \\
Var(Y|x=1) &= \frac{0,129}{0,500} \cdot (0-1,598)^2 + \frac{0,157}{0,500} \cdot (1-1,598)^2 + \frac{0,214}{0,500} \cdot (3-1,598)^2 = 1,612 \\
Var(Y|x=2) &= \frac{0,214}{0,500} \cdot (0-1,088)^2 + \frac{0,157}{0,500} \cdot (1-1,088)^2 + \frac{0,129}{0,500} \cdot (3-1,088)^2 = 1,452 \\
Cov(X,Y) &= 0,129 \cdot (0-1,343)(1-1,5) + 0,214 \cdot (0-1,343)(2-1,5) \\
&\quad +0,157 \cdot (1-1,343)(1-1,5) + 0,157 \cdot (1-1,343)(2-1,5) \\
&\quad +0,214 \cdot (3-1,343)(1-1,5) + 0,129 \cdot (3-1,343)(2-1,5) = -0,128 \\
\rho_{XY} &= \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X \cdot \sigma_Y)} = \frac{-0,128}{\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{1,597}} = -0,143
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
E(W) &= 0,343 \cdot (-1) + 0,314 \cdot 1 + 50,343 \cdot 5 = 1,686 \\
Var(W) &= 0,343 \cdot (-1-1,686)^2 + 0,314 \cdot (1-1,686)^2 + 0,343 \cdot (5-1,686)^2 = 6,389 \\
E(W|x=1) &= \frac{0,129}{0,500} \cdot (-1) + \frac{0,157}{0,500} \cdot (1) + \frac{0,214}{0,500} \cdot (5) = 2,196 \\
Var(W|x=2) &= \frac{0,214}{0,500} \cdot (-1) + \frac{0,157}{0,500} \cdot (1) + \frac{0,129}{0,500} \cdot (5) = 1,176 \\
Var(W|x=1) &= \frac{0,129}{0,500} \cdot (-1-2,196)^2 + \frac{0,157}{0,500} \cdot (1-2,196)^2 + \frac{0,214}{0,500} \cdot (5-2,196)^2 = 6,450 \\
Var(W|x=2) &= \frac{0,214}{0,500} \cdot (-1-1,176)^2 + \frac{0,157}{0,500} \cdot (1-1,176)^2 + \frac{0,129}{0,500} \cdot (5-1,176)^2 = 5,809 \\
Cov(W,Z) &= 0,129 \cdot (-1-1,686)(0-(-0,5)) + 0,214 \cdot (-1-1,686)(-1-(-0,5)) \\
&\quad +0,157 \cdot (1-1,686)(0-(-0.5)) + 0,157 \cdot (1-1,686)(-1-(-0,5)) \\
&\quad +0,214 \cdot (5-1,686)(0-(-0,5)) + 0,129 \cdot (5-1,686)(-1-(-0,5)) = 0,255 \\
\rho_{WZ} &= \frac{0,255}{\sqrt{6,389} \cdot \sqrt{0,5}} = 0,143
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 1.5

a) $P(Y \leq 2) = \Phi(Z) = \Phi(\frac{2-1}{\sqrt{3}}) = 0,7190$, wenn $Y \sim N(1,3)$.
b) $P(Y \geq 0) = 1 - \Phi(Z) = 1 - \Phi(\frac{0-4}{\sqrt{6}}) = 0,9484$, wenn $Y \sim N(4,6)$.
c) $P(10 \leq Y \leq 18) = \Phi(\frac{18-14}{\sqrt{10}}) - \Phi(\frac{10-14}{\sqrt{10}}) = \Phi(1,265) - \Phi(-1,265)$
$= 0,8980 - (1 - 0,8980) = 0,796$, wenn $Y \sim N(14,10)$.

Übungsaufgabe 1.6

a) $P(Y \leq 3{,}84) = 0,95$, wenn $Y \sim \chi^2_1$.
b) $P(Y \leq 37{,}57) = 0,99$, wenn $Y \sim \chi^2_{20}$.
c) $P(Y > 15{,}99) = 1 - 0,90 = 0,10$, wenn $Y \sim \chi^2_{10}$.

Übungsaufgabe 1.7

a) $P(Y \leq 2{,}30) \approx 0,95$, wenn $Y \sim F^5_{100}$.
b) $P(Y \leq 2{,}85) \approx 0,95$, wenn $Y \sim F^{15}_{10}$.
c) $P(Y > 2{,}69) \approx 1 - 0,99 = 0,01$, wenn $Y \sim F^{40}_{20}$.

Übungsaufgabe 1.8

a) $E(Y|X) = E(X^2 + Z|X) = E(X^2|X) + E(Z|X) = X^2 + E(Z) = X^2$
b) $E(XZ) = E(X) \cdot E(Z) = 0$
c) $Cov(X,Z) = E(XZ) - \mu_X \mu_Z = 0$